Sur le polytope des sous-tournois sans circuit

R. Sirdey[1 2] et H. Kerivin[3]

[1] Service d'architecture BSC, Nortel GSM Access R&D (PC 12A7), Parc d'activités de Magny-Châteaufort, 78928 Yvelines cedex 09
[2] Heudiasyc, UMR CNRS 6599, Université de Technologie de Compiègne, Centre de recherches de Royallieu, BP 20529, 60205 Compiègne cedex
renauds@nortel.com
[3] Limos, UMR CNRS 6158, Université Blaise Pascal/Clermont-Ferrand II, Complexe scientifique des Céseaux, 63177 Aubière cedex
kerivin@math.univ-bpclermont.fr

1 Introduction

Nous introduisons le polytope des sous-tournois sans circuit (*partial linear ordering polytope* en anglais) noté P^n_{PLO} et défini comme l'enveloppe convexe des vecteurs d'incidence des ordonnancements linéaires d'un sous-ensemble des nœuds du graphe orienté complet à n sommets, les nœuds exclus de l'ordonnancement étant munis d'une boucle. La figure 1(a) fournit un exemple de sommet de P^6_{PLO}.

Nous discutons de quelques propriétés élémentaires de P^n_{PLO} et présentons plusieurs classes d'inégalités qui en définissent des facettes. En guise de conclusion, nous abordons un problème d'ordonnancement à contraintes de ressources en rapport avec P^n_{PLO}.

Les preuves des résultats énoncés dans les sections 2 et 3 sont données dans [2].

2 Propriétés élémentaires

De manière équivalente, le polytope des sous-tournois sans circuit correspond à l'enveloppe entière du polytope défini par le jeu d'inégalités suivant

$$\begin{cases} \delta_{ij} + \delta_{ji} + \delta_{ii} + \delta_{jj} \geq 1 & 1 \leq i < j \leq n & (1) \\ \delta_{ij} + \delta_{ji} + \delta_{ii} \leq 1 & i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j & (2) \\ \delta_{ij} + \delta_{jk} - \delta_{ik} \leq 1 & i, j, k \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j \neq k \neq i & (3) \\ 0 \leq \delta_{ij} \leq 1 & i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j & \end{cases}$$

Lorsque $\delta_{ij} = 1$ $(i \neq j)$ le noeud i est ordonné avant le nœud j et lorsque $\delta_{ii} = 1$ le nœud i n'est pas ordonné.

On peut alors montrer que P^n_{PLO} est de pleine dimension et que les inégalités $\delta_{ij} \geq 0$ $(i \neq j)$ ainsi que les inégalités de type (1) et (2) définissent toujours des facettes de P^n_{PLO}.

Les inégalités $\delta_{ij} \geq 0$ $(i = j)$, $\delta_{ij} \leq 1$ ainsi que les inégalités de transitivité (3), quant à elles, ne définissent jamais des facettes de P^n_{PLO}. Les inégalités de transitivité peuvent néanmoins être remplacées par les inégalités

$$\delta_{ij} + \delta_{jk} - \delta_{ik} + \delta_{jj} \leq 1 \quad i, j, k \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j \neq k \neq i$$

qui, elles, fournissent des facettes de P^n_{PLO}.

3 Classes de facettes non triviales

Dans la mesure où optimiser sur P^n_{PLO} permet de résoudre le problème de l'ordonnancement linéaire de plus fort poids [1], il est peu vraisemblable qu'une description complète de P^n_{PLO} puisse être obtenue. Néanmoins nous avons mis en évidence plusieurs classes de facettes non triviales.

Théorème 1 *Soit $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ avec $|I| \geq 2$, l'inégalité suivante définit une facette de P^n_{PLO} :*

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \delta_{ij} \geq |I| - 1 \tag{4}$$

Théorème 2 *Soit $I \subset \{1,\dots,n\}$ et $i_0 \in \{1,\dots,n\} \setminus I$, l'inégalité suivante fournit une facette de P^n_{PLO} :*

$$\delta_{i_0 i_0} + \sum_{i \in I}(\delta_{i i_0} + \delta_{i_0 i}) - \sum_{i \in I} \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \delta_{ij} \leq 1 \tag{5}$$

Les inégalités de types (4) et (5) généralisent les inégalités de types (1) et (2), respectivement.

Théorème 3 *Soit $i_0 \in \{1,\dots,n\}$, $j_0 \in \{1,\dots,n\} \setminus \{i_0\}$, $\emptyset \subset I \subset \{1,\dots,n\} \setminus \{i_0, j_0\}$ et $\emptyset \subset J \subset \{1,\dots,n\} \setminus \{i_0, j_0\}$ avec $I \cap J = \emptyset$, l'inégalité suivante définit une facette de P^n_{PLO} :*

$$\delta_{i_0 i_0} + \delta_{j_0 j_0} + \delta_{i_0 j_0} + \sum_{i \in I}(\delta_{i i_0} + \delta_{i_0 i} - \delta_{i j_0}) + \sum_{j \in J}(\delta_{j j_0} + \delta_{j_0 j} - \delta_{i_0 j})$$
$$- \sum_{i \in I} \sum_{i' \in I \setminus \{i\}} \delta_{i i'} - \sum_{j \in I} \sum_{j' \in I \setminus \{j\}} \delta_{j j'} - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \delta_{ji} \leq 2$$

Les figures 1(b), 1(c) et 1(d) illustrent les classes de facettes définies dans les énoncés des théorèmes précédents (de gauche à droite).

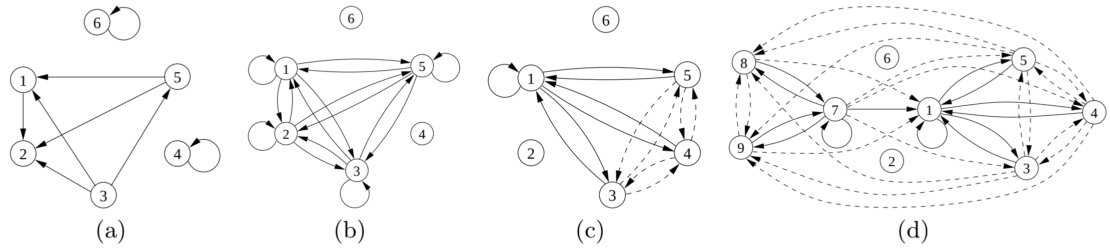

Fig. 1. Un sommet de P^6_{PLO} et des facettes de P^6_{PLO}, P^6_{PLO} et P^9_{PLO}, voir texte.

4 Application à un problème d'ordonnancement

Le polytope des sous-tournois sans circuit se présente dans le cadre de l'étude d'un problème de reconfiguration dynamique d'autocommutateurs répartis [3,5].

Grossièrement, il s'agit d'ordonner des déplacements de processus de traitement d'appels de telle manière que des contraintes de capacité sur les processeurs du système ne soient jamais violées, les situations de bloquage étant résolues en arrêtant temporairement des processus.

Le contexte temps réel de cette application impose l'utilisation de méthodes efficaces et donc approchées [4], dans la mesure où le problème est NP-difficile au sens fort [3]. Néanmoins, la mise en œuvre de méthodes exactes est requise afin d'étudier empiriquement la qualité des solutions obtenues à l'aide des méthodes approchées.

L'étude de P^n_{PLO} doit fournir une partie des fondements théoriques nécessaires à la mise en œuvre d'un algorithme de résolution exacte par recherche arborescente avec coupes.

Références

1. G. Reinelt : The linear ordering problem : algorithms and applications. Heldermann, Berlin (1985).
2. H. Kerivin et R. Sirdey : Polyhedral combinatorics of a capacity-constrained ordering problem. Rapport technique PE/BSC/INF/016520 V01/EN, Service d'architecture BSC, Nortel GSM Access R&D (2005).
3. R. Sirdey, J. Carlier, H. Kerivin et D. Nace : On a capacity-constrained scheduling problem with application to distributed systems reconfiguration. Submitted to the European Journal of Operational Research (2005).
4. R. Sirdey, J. Carlier et D. Nace : Approximate resolution of a capacity-constrained scheduling problem. Rapport technique PE/BSC/INF/016550 V01/EN, Service d'architecture BSC, Nortel GSM Access R&D (2005).
5. R. Sirdey, D. Plainfossé et J.-P. Gauthier : A practical approach to combinatorial optimization problems encountered in the design of a high-availability distributed system. Proceedings of INOC (2003).